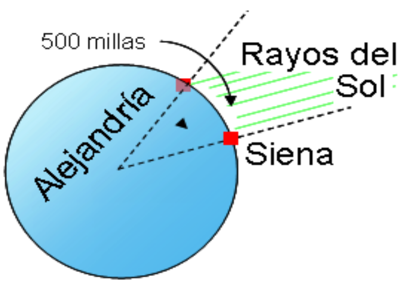
	I.E LEÓN XIII EL PEÑOL MATEMÁTICAS	GRADO: 10 TALLER Nº: 2 SEMESTRE I

ÁNGULOS Y LONGITUDES DE ARCO

RESEÑA HISTÓRICA



Un Problema de Ángulos en la Antigüedad.
El matemático griego Eratostenes (aprox 276 – 195 a.C.) midió la circunferencia de la tierra a partir de lo siguiente: Noto que cierto día que el sol brillaba directamente hacia el interior de un pozo profundo en Siena, al mismo tiempo en Alejandría, a 500 millas hacia el norte (sobre el mismo meridiano), los rayo del sol brillaban haciendo un ángulo de 72° respecto al cenit (Alejandría). Si bien los datos utilizados por Eratóstenes no eran tan precisos como se están presentando, logro con ellos una buena aproximación de lo que en realidad es la circunferencia de la tierra.

- **OBJETIVO GENERAL**

Adquirir destrezas en el manejo de ángulos y situaciones problema relacionadas con ellos.

- **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

1. Manejar el concepto de ángulo.
2. Identificar las diferentes unidades de medida de un ángulo.
3. Adquirir destrezas en la conversión de unidades de medidas de ángulos.
4. Entender y aplicar la relación existente entre la medida de un ángulo central y la longitud del arco que subtiende.

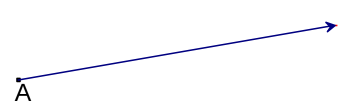
- **PALABRAS CLAVES**

Ángulo, radian, grados, longitud de arco, lado de un ángulo, velocidad angular, velocidad lineal.

- **DESARROLLO TEÓRICO**

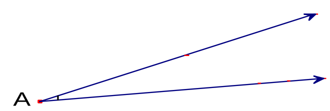
Un concepto fundamental para el estudio de la geometría y de la trigonometría es el ángulo, básicamente se podría decir que esta figura geométrica juega un papel determinante en ambas teorías. A continuación presentamos algunos conceptos con su respectiva ilustración.

Rayo. (semirrecta)
El la parte de la recta que inicia en un punto A y se extiende indefinidamente. El punto A es llamado el vértice u origen del rayo



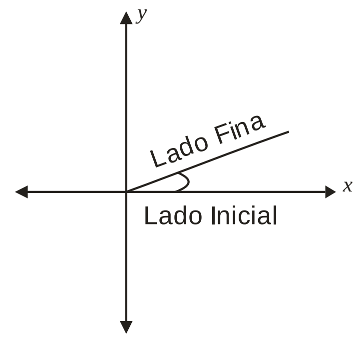
Ángulo.

Es la unión de dos rayos con vértice común, donde uno de los rayos será llamado la inicial y el otro el lado final.



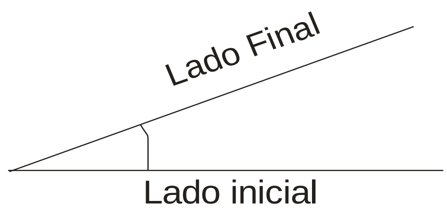
Ángulo en Posición Normal.

Un ángulo cuyo vértice esta en el origen del sistema coordenado y su lado inicial coincide con el eje x, es llamado un ángulo en posición Normal.

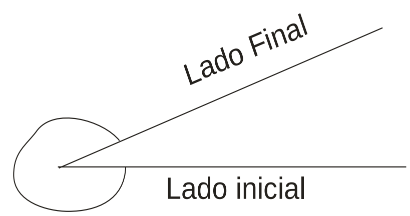


Nota

El ángulo formado por dos rayos se identifica señalando la dirección y cantidad de rotación desde el lado inicial hacia el lado final. Cuando este se encuentra en posición Normal, se podrá hablar de ángulos positivos y negativos así:



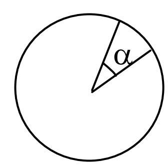
Angulo positivo, se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj



Angulo negativo, se mueve en el sentido de las manecillas del reloj

Ángulo Central

Un ángulo cuyo vértice esta en el centro de una circunferencia y sus lados la cortan es llamado un ángulo central.



UNIDADES ANGULARES

La medida de los ángulos se ha determinado midiendo la cantidad de rotación necesaria, en sentido contrario a las manecillas del reloj, para que el lado inicial coincida con el lado final. Existen básicamente dos unidades de medida para ángulos utilizadas, los grados y los radianes.

Grados

Son una medida de ángulos que se basa en la división de una circunferencia en 360 partes iguales, y estas a su vez en 60 subpartes, llamadas minutos, que también son divididas en 60 partes iguales que llamaremos segundos; con base en esta partición se tienen las siguientes equivalencias.

360º	≡	un giro completo alrededor de una circunferencia
180º	≡	1/2 vuelta alrededor de una circunferencia
90º	≡	1/4 de vuelta
1º	≡	1/360 de vuelta

Ejemplos

1. Cuantas vueltas hay en 12º.

Solución

Una regla de tres te ayudará a solucionar el ejercicio.

grados	*vueltas*
360	1
12	x

Luego:

$$x = \frac{12 \times 1}{360} vueltas \,.$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{1}{30} vuelta$$

2. Cuantos grados hay en 4/5 de vuelta.

Solución

Una regla de tres te ayudará a solucionar el ejercicio.

vueltas	*grados*
1	360
$4/5$	x

Luego:

$$x = \frac{\left(4/5\right) \times 360}{1} grados \,.$$

Por lo tanto: $x = 288 grados$

3. Expresar 62.25º en términos de grados, minutos y segundos.

Solución

El ejercicio se reduce a determinar cual es la equivalencia en minutos de 0.25º, y si no es exacta, tomar los decimales del nuevo valor para encontrar la cantidad de segundos, esto lo puedes realizar mediante una regla de tres simple, así:

grados	minutos
1	60
0.25	x

Luego: $x = \dfrac{0.25 \times 60}{1} \min = 15 \min = 15\,'$.

Observe que la comilla denota los minutos y una doble comilla denotará los segundos. Por lo tanto el ángulo es:

$$x = 62^{o} 15' 0''$$

Actividad

1. Utiliza regla de tres para determinar el número de vueltas que hay en:

a) 25°	b) 38°	c) 450°	d) 780°
e) 135°	f) 270°	g) 210°	h) 330°

2. Utiliza regla de tres para determina cuántos grados hay en las siguientes vueltas.

a) 3.5 vueltas	b) 2 vueltas	c) $1\frac{1}{3}$ de vuelta	d) $\frac{7}{4}$ de vuelta

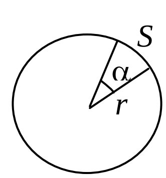
3. Lleve los siguientes ángulos a su forma de grados, minutos y segundos.

a) 25.75°	b) 45.69°	c) 125.68°	d) 234.16°

Radianes

También se puede definir otra unidad angular, el radián, que en las aplicaciones físicas es mucho más práctico y directo que trabajar con grados.

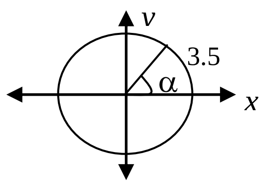
Dada una circunferencia de radio r y α un ángulo central, se define un ***radian*** como la medida del ángulo α cuando la longitud del arco que subtiende es igual al radio de la circunferencia.



En la situación que presenta la grafica de la izquierda, se tiene que $\alpha = 1 rad$, con $r = S$.

Ejemplo

Hallar la medida en radianes del ángulo α dado en la grafica, si se sabe que el radio de la circunferencia es 3.



Solución

Como la circunferencia radio 3, $r = 3$, y se sabe que $S = 3.5$, por lo tanto, una regla de tres simple será de ayuda para encontrar el ángulo.

rad	S
1	3
x	3.5

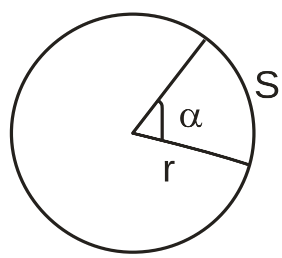
Luego, al solucionar la regla de tres simple se tiene:

$x = \dfrac{1 \times 3.5}{3} = 1.166666 rad$ Por lo tanto, el ángulo central en una circunferencia de radio tres que subtiende una longitud de arco de 3.5 mide 1.1666 rad.

■

Del ejemplo anterior se puede concluir que:

La magnitud de un ángulo α medido en radianes está dada por la longitud del arco de circunferencia que subtiende, dividido por el valor del radio.



$\alpha = \dfrac{S}{r}$; donde

Donde:

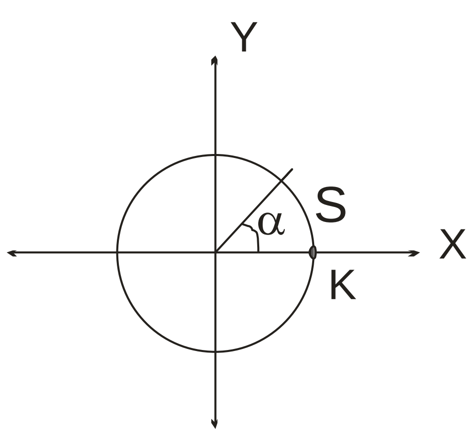
- S es la longitud de arco.

- r es el radio de la circunferencia.

- α es la medida del ángulo en radianes.

Actividad

Dada la grafica donde *S* es la longitud del arco subtendido por el ángulo α, K es la componente *x* del punto de intersección de la circunferencia con el eje *X*, encuentre la medida de α en radianes.



a) S=2, K=2; $\alpha = ?$

b) S=5, K=2.5, $\alpha = ?$

c) S=4, K=6, $\alpha = ?$

d) S=20, K=100, $\alpha = ?$

e) S=45, K=60, $\alpha = ?$

LONGITUD DE ARCO Y AREA DEL SECTOR CIRCULAR

Como $\alpha = \frac{S}{r}$, se puede obtener a partir de esta ecuación una expresión para hallar la longitud del arco subtendido por el ángulo α, la cual está dada por:

$$\boxed{S = \alpha r \; ; \; \alpha \text{ en radianes}}$$

Ejemplo

Determine la longitud del arco de una circunferencia con radio 2 cm, que es subtendido por un ángulo de $1/4\, rad$.

Solución.

En este caso se tiene: $r = 2cm$, $\alpha = \frac{1}{4} rad$ y sabes que $S = \alpha\, r$, por lo tanto:

$$S = \alpha\, r = \frac{1}{4} rad \times 2cm$$
$$= \frac{1}{2} cm$$

Por lo tanto, la longitud del arco subtendido por el ángulo α es $S = \frac{1}{2} cm$

Actividad

1. En cada una de las siguientes actividades encuentre la longitud del arco.

   a) $r = 10cm$; $\alpha = \frac{1}{2} rad$ b) $r = 6cm$; $\alpha = \frac{3}{5} rad$ c) $r = 24cm$; $\alpha = \frac{5}{3} rad$

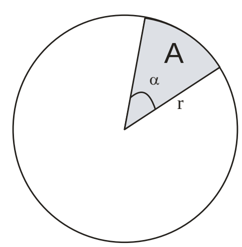
2. Encuentre el valor del ángulo α en radianes, dados el radio y la longitud de arco.

   a) $r = 5cm$; $S = 3cm$ b) $r = 6mt$; $S = 8mt$ c) $r = 24millas$; $S = 12millas$

Área de un Sector Circular.

En un circulo de radio r, el área A de un sector circular determinado por un ángulo central α (en radianes) esta dada por:

$$A = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$



Ejemplo

Determine el área de un sector circular determinado por un ángulo central $\alpha = \frac{\pi}{3} rad$ de un círculo de radio $r = 3\,\mathrm{mt}$.

Solución.

Es importante que antes de aplicar la expresión para hallar el área del sector circular se verifique que el ángulo este dado en radianes, como sucede en este caso. Una vez verificado se tiene:

$$A = \frac{1}{2} r^2 \alpha = \frac{1}{2} (3\,\mathrm{m})^2 \left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{3\pi}{2} m^2$$

RELACION ENTRE GRADOS Y RADIANES

Con base en la expresión dada para longitud de arco, puedes notar que una vuelta completa tiene una longitud de arco de $2\pi r$, por lo tanto la medida en radianes de una vuelta completa será:

$$S = r\alpha$$
$$S = 2\pi r$$
$$r\alpha = 2\pi r$$
$$\alpha = 2\pi$$

Esto es, el ángulo en radianes para una vuelta completa es $2\pi rad$, por lo tanto:

GRADOS		VUELVAS		RADIANES
360º	$\equiv$	1 giro completo alrededor de una circunferencia	$\equiv$	$2\pi rad$
180°	$\equiv$	1/2 vuelta alrededor de una circunferencia	$\equiv$	πrad

Se sigue de la tabla anterior que:

GRADOS		RADIANES
360º	$\equiv$	$2\pi rad$
180°	$\equiv$	πrad

La relación anterior te permitirá pasar con gran facilidad la medida de un ángulo en grados a radianes y cuando la tengas en radianes, pasarla a grados.

Ejemplos.

1. Un ángulo mide 60°, cual será su medida en radianes?

Solución

Una regla de tres será de utilidad para solucionar el ejercicio.

Grados		Radianes
180	$\equiv$	π
60	$\equiv$	x

$$x = \frac{60 \times \pi}{180} rad = \frac{\pi}{3} rad$$

Luego 60° equivalen a $\frac{\pi}{3} rad$.

2. Un ángulo mide $\frac{5\pi}{3} rad$, cual será su medida en grados?

Solución

Una regla de tres será de utilidad para solucionar el ejercicio.

Grados		Radianes
180	$\equiv$	π
x	$\equiv$	$\frac{5\pi}{3}$

$$x = \frac{180 \times \frac{5\pi}{3}}{\pi} = 300^\circ$$

Luego $\frac{5\pi}{3} rad$ equivalen a 300°.

Actividad
Utilice las reglas de conversión y determine las equivalencias de los ángulos notables presentados en la siguiente tabla.

GRADOS			**45°**	**60°**	**90**		**135**	**150**	**180**
RADIANES	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$			

GRADOS		**225**		**270**	**300**	**315**	**330**	**360**	
RADIANES	$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{3}$			2π	

MOVIMIENTO CIRCULAR

Sabiendo que la velocidad media de un objeto se define como la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido, si un objeto se mueve con velocidad constante sobre una circunferencia de radio r y si S es la distancia recorrida en el tiempo t (observe que S es la longitud del arco que recorre el objeto) entonces se define la velocidad lineal como:

Velocidad Lineal: $$v = \frac{S}{t}$$

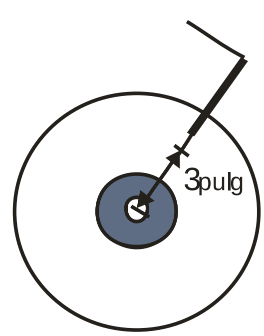
Conforme el objeto recorre la circunferencia, se genera una velocidad asociada con esta, suponga que α es el ángulo central que genera el desplazamiento del objeto sobre la circunferencia en el tiempo *t*, entonces la velocidad angular del objeto está dada por:

Velocidad Angular: $$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

Relación Velocidad Angular – Velocidad Lineal: $v = r\omega$, donde r es el radio de la circunferencia.

Ejemplo.
Determinar la velocidad lineal de un disco del 331/3 rpm (revoluciones por minuto) en el punto donde la aguja esta a 3 pulgadas del centro del disco.

Solución.
En este caso se tiene que $r = 3pul$, puedes observar que a esta distancia del centro se determina una nueva circunferencia. La velocidad angular en este caso esta dada por $\omega = 33\tfrac{1}{3}\frac{vueltas}{\min uto}$, luego:



$$\omega = \frac{33\frac{1}{3}\,vueltas}{\text{minuto}} = \frac{100 \text{ vueltas}}{3 \text{ minutos}} \cdot \frac{2\pi \text{ radianes}}{\text{vueltas}} \quad = \frac{200\pi \text{ rad}}{3 \text{ minutos}}$$

Luego sustituyendo en la ecuación lineal se tiene que:

$$v = r\omega = 3pul\,\frac{200\pi \text{ rad}}{3 \text{ minutos}} = 200\pi \frac{pul}{\text{min}}$$

Esto es, la velocidad lineal está dada por: $v = 200\pi \frac{pul}{\text{min}}$.

➢ EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine la medida en radianes de cada uno de los siguientes ángulos.

   a) *40°* b) *-80°* c) *36°* d) *12°* e) *-150*

2. Determine la medida en grados de cada uno de los siguientes ángulos.

   a) $-\frac{3\pi}{4}rad$ b) $\frac{7\pi}{2}rad$ c) $1.5rad$ d) $\frac{\pi}{5}rad$ e) $\frac{\pi}{18}rad$

3. Un ángulo central en una circunferencia de radio r=5m esta subtendido por un arco de longitud de 6 m. Determine la medida del ángulo en grados y radianes.
4. Determine la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de 45° y tiene un radio de 10 mt.
5. Un arco de 100 mt. de longitud subtiende un ángulo central α en un círculo de 50 cm de radio. Determine la medida del ángulo en grados y radianes.Un sector circular de 24 millas de radio tiene una área de 288 millas^2. Determine el ángulo central del sector.
7. El minutero de un reloj tiene 6 pulgadas de largo. En 15 minutos, ¿Qué distancia recorre la punta del minutero?
8. Un péndulo oscila un ángulo de 20° cada segundo. Si el péndulo tiene 40 pulgadas de largo. ¿Qué distancia recorres su extremo cada segundo?
9. El radio de una rueda de automóvil es de 15 pulgadas. Si las ruedas giran a una razón de 3 revoluciones por segundo, ¿Qué tan rápido se esta moviendo el automóvil?
10. El limpiador del parabrisas de un automóvil mide 18 pulgadas de largo. ¿Cuántas pulgadas cubre el extremo del limpiador en 1/3 de revolución?
11. En una hora, el minutero de un reloj recorre una circunferencia completa, y la manecilla de las horas de habrá movido $\frac{1}{12}$ de la circunferencia. ¿A través de cuantos radianes se abran movido el minutero y la manecilla de las horas desde la 1:00 p.m. hasta las 6:45, de un mismo día?
12. Utilice la información y la figura dada en la reseña histórica para determinar el radio y la circunferencia de la tierra.

➢ PEQUEÑOS RETOS

1. Un pintor dibuja una secuencia de frutas de la siguiente manera: una azul, una verde, una roja, una amarilla, una azul, una verde, una roja, una amarilla y así sucesivamente. Entonces el color de la fruta en el lugar 177 de la secuencia es:
   a.) Azul b.) Verde c.) Roja d.) Amarilla